Valeriu Baltag
Boris Cinic
Ion Goian
Valeriu Guțu
Mihai Izman

OLIMPIADELE DE MATEMATICĂ ale Republicii Moldova (1957–2001)

Editura GIL
Zalău, 2010

Cuprins

PARTEA ÎNTÂI

ENUNȚURI

PROBLEME SELECTATE DE LA OLIMPIADELE I-XXIX (1957-1985)

1957/9.1. Fie $ABCDEFGHIK$ un decagon regulat înscris într-un cerc cu centrul în punctul O. Să se demonstreze că: $AD = OA + AB$.

1957/10.2. Să se demonstreze că ecuația $x^2 + px + q = 0$ nu are rădăcini raționale dacă p și q sunt numere întregi impare.

1958/10.3. Să se demonstreze că în orice triunghi ABC este adevărată relația:

$$a^2 - b^2 = 2S(\text{ctg } B - \text{ctg } A).$$

1959/8.4. Într-un cerc coarda CD este paralelă cu diametrul AB. Să se demonstreze că $MC^2 + MD^2 = MA^2 + MB^2$, oricare ar fi punctul M pe diametrul AB.

1959/9.5. Să se demonstreze că trei numere distincte nu pot forma concomitent o progresie aritmetică și o progresie geometrică.

1959/10.6. Să se demonstreze că cele trei segmente care unesc mijlocul înălțimii unui tetraedru regulat cu vârfurile bazei lui sunt două câte două perpendiculare.

1960/10.7. Un plan taie pe muchiile unui unghi triedru drept de vârf S segmentele: $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$. Fie M un punct arbitrar al feței ABC astfel încât distanțele de la el la fețele SBC, SCA și SAB sunt $MK = x$, $ML = y$ și respectiv $MN = z$. Să se demonstreze că:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 .$$

1961/9.8. Să se demonstreze că pentru orice progresie aritmetică strict crescătoare $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_1 > 0$ este adevărată relația:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + .. + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}, n \geq 2.$$

1961/10.9. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt situate în spațiu astfel încât planele lor nu sunt paralele și dreptele AA_1, BB_1 și CC_1 au un punct comun. Să se demonstreze că dacă dreptele AB și A_1B_1, BC și B_1C_1, AC și A_1C_1 sunt respectiv concurente, atunci punctele lor de intersecție sunt coliniare.

1962/10.10. Sunt date numerele prime distincte $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Să se afle câți divizori are numărul $q = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$ (inclusiv 1 și q).

1966/10.11. Fie R și r raza sferei circumscrise și respectiv raza sferei înscrise într-o piramidă patrulateră regulată. Să se demonstreze că $R \geq \left(1 + \sqrt{2}\right) r$.

1967/9.12. Să se demonstreze că suma pătratelor a cinci numere naturale consecutive nu poate fi un pătrat perfect.

1967/10.13. Există oare un $p \in \mathbb{N}$ astfel încât produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot 2^{p-n}$ să reprezinte un număr întreg, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$?

1968/9.14. Printre 8 monede de aceeași formă există una falsă, care se deosebește de una veritabilă prin greutate. Având la dispoziție o balanță cu brațe egale și fără greutăți marcate și, efectuând cel mult trei cântăriri, să se afle moneda falsă.

1968/10.15. O sferă de rază r este tangentă la fiecare muchie a unei piramide triunghiulare. Centrul acestei sfere este situat pe înălțimea piramidei, la distanța $r\sqrt{3}$ de la vârful respectiv. Să se demonstreze că piramida este regulată și să se afle înălțimea ei.

1971/9.16. Într-un plan se duc n drepte distincte astfel încât oricare două nu sunt paralele și oricare trei nu sunt concurente. Să se afle numărul de regiuni în care este împărțit planul de cele n drepte.

1971/10.17. Punctele A și B se mișcă cu viteze constante și egale pe două drepte perpendiculare. Să se demonstreze că există un punct care în orice moment este egal depărtat de punctele A și B.

1972/8.18. Sunt date $n, n \geq 8$, monede de aceeași formă. Dintre acestea cel mult două monede sunt false și au aceeași greutate, diferită de greutatea unei monede veritabile. Având la dispoziție o balanță cu brațe egale și fără greutăți marcate și efectuând numai trei cântăriri, să se afle dacă printre aceste monede sunt monede false. Să se afle dacă o monedă falsă (în caz că există) este mai grea sau mai ușoară decât una veritabilă.

1972/10.19. Să se afle toate funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac ecuația:

$$f(x)+x\cdot f\left(\frac{x}{2x-1}\right)=2,\ \forall\ x \neq \frac{1}{2}.$$

1973/9.20. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Câte ecuații de forma $x^2 - px - q = 0$, cu $p, q \in \mathbb{N}^*$, au rădăcina pozitivă mai mică decât n ?

1973/9.21. Lungimile catetelor ale două triunghiuri dreptunghice sunt numere naturale. Să se demonstreze că dacă ipotenuzele triunghiurilor sunt congruente și pătratul lungimilor lor este număr prim, atunci aceste triunghiuri sunt congruente.

1973/10.22. Să se demonstreze că dacă progresia aritmetică cu primul termen a și rația $d \neq 0$ conține o progresie geometrică, atunci $\frac{a}{d}$ este un număr rațional.

1974/8.23. Să se demonstreze că pentru orice număr natural nenul n este adevărată relația:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)<2.$$

1974/9.24. Din tabelul:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & \ldots & 3n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & \ldots & n^2 \end{pmatrix}$$

se scot n numere, câte unul de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană. Să se afle suma numerelor scoase din tabel.

1975/8.25. Să se demonstreze că pe o tavă rotundă de rază 10 cm poate fi așezat un tort de formă dreptunghiulară de dimensiuni 8 cm × 28 cm. (Se permite să fie tăiat tortul în două bucăți printr-o tăietură dreaptă.)

1975/9.26. Toate cifrele numerelor 2^{1975} și 5^{1975} sunt scrise în șir. Să se afle numărul cifrelor din șir.

1975/9.27. Pe șapte cartoane sunt scrise cifrele de la 1 la 7. Să se demonstreze că nici un număr de 7 cifre format din aceste cartoane nu se divide printr-un altul format analog.

1975/10.28. Să se demonstreze că pentru orice numere naturale m și n există un număr natural k astfel încât:

$$\left(\sqrt{m+1}-\sqrt{m}\right)^{2^n}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}.$$

1976/9.29. În pentagonul convex $ABCDE$ dintre cele cinci triunghiuri ABC, BCD, CDE, DEA și EAB patru au arii egale cu S, iar unul cu $1,5S$. Să se afle aria acestui pentagon.

1976/10.30. Să se demonstreze că dacă $x_1>0$, $x_2>0$, ..., $x_n>0$, atunci are loc inegalitatea:

$$\left(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n\right)^{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)}\le x_1^{x_1}\cdot x_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{x_n}.$$

1977/8.31. Din 101 monede 50 sunt false. Fiecare monedă falsă diferă la greutate de cea veritabilă cu un gram. Având la dispoziție un cântar cu două talere și cu indicator în grame, să se determine printr-o singură cântărire dacă o monedă luată la întâmplare este falsă sau veritabilă.

1977/9.32. O foaie de hârtie a fost împărțită în cinci bucăți. S-au luat câteva din aceste bucăți și, din nou fiecare s-a rupt în alte cinci bucăți. După efectuarea acestui procedeu de câteva ori, două persoane au numărat toate bucățile și au obținut rezultatele: 1976 și respectiv 1977. Cel puțin unul dintre rezultatele date nu este corect. Care anume?

1977/10.33. Pentru orice număr natural nenul n, notăm cu a_n ultima cifră a numărului n^n. Să se afle dacă fracția zecimală infinită $0,\overline{a_1a_2a_3\ldots}$ este un număr rațional.

1978/8.34. Pe fiecare planetă a unui sistem planetar se află câte un astronom, care poate observa numai planeta cea mai apropiată. Distanțele dintre oricare două planete sunt diferite, iar numărul planetelor este impar. Să se demonstreze că există o planetă care nu poate fi observată de nici un astronom.

1979/8.35. Se spune că un bilet de autobuz este "cu noroc", dacă numărul lui (format din șase cifre) are proprietatea: suma primelor trei cifre este egală cu suma celorlalte trei cifre. Să se demonstreze că suma tuturor numerelor "cu noroc" se divide cu numărul "miraculos" 13.

1979/9.36. Suma a zece numere naturale nenule este egală cu 1001. Să se afle valoarea maximă posibilă a celui mai mare divizor comun al acestor numere.

1979/10.37. Numerele naturale a_1, a_2, ..., a_n ($n\ge 2$) sunt prime între ele două câte două și verifică condițiile:

$$1<a_k<(2n-1)^2,\ k=1, 2, ..., n.$$

Să se demonstreze că cel puțin unul dintre aceste numere este prim.

1980/8.38. Fie C mijlocul segmentului AB. Pe acest segment luăm $2n$ puncte simetrice în raport cu C. Dintre acestea, n puncte sunt colorate în roșu, iar restul în albastru. Să se demonstreze că suma distanțelor de la toate punctele roșii la punctul A este egală cu suma distanțelor de la toate punctele albastre la punctul B.

1980/9.39. Toate laturile unui poligon cu n laturi sunt tangente la un cerc. Un punct arbitrar din interiorul acestui cerc este unit cu toate vârfurile poligonului și cu toate punctele de tangență. Cele $2n$ triunghiuri obținute sunt colorate alternativ în roșu și albastru. Să se demonstreze că produsul ariilor tuturor triunghiurilor roșii este egal cu produsul ariilor tuturor triunghiurilor albastre.

1980/10.40. Să se afle triunghiul de arie maximă pentru care produsul lungimilor laturilor sale este egal cu 1.

1981/9.41. Să se afle toate funcțiile $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, care verifică relațiile:

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) - f(xy) + 1,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$, iar $f(1) = 2$.

1981/9.42. Toate unghiurile interioare ale unui poligon înscris într-un cerc sunt congruente. Să se demonstreze că dacă poligonul are un număr impar de laturi, atunci el este regulat.

1981/10.43. Fie n $(n \geq 3)$ puncte pe un plan. Distanța dintre oricare două puncte este mai mică sau egală cu 1. Pentru fiecare punct dat există cel puțin un punct printre cele date situat la o distanță egală cu 1. Să se demonstreze că există un poligon convex cu vârfurile în punctele date.

1982/8.44. Să se afle toate tripletele de numere reale (x, y, z) ce verifică relația:

$$\left(xt^2 + yt + z\right) \cdot \left(\frac{x}{t^2} + \frac{y}{t} + z\right) = 6\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - 35\left(t + \frac{1}{t}\right) + 62, \ \forall\ t \neq 0.$$

1982/9.45. Să se afle cel mai mare număr natural n pentru care următorul sistem este compatibil în $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 1 < x < 2, \\ 2 < x^2 < 3, \\ 3 < x^3 < 4, \\ \dots\dots\dots\dots \\ n < x^n < n+1. \end{cases}$$

1982/9.46. Numărul A are 1982 de cifre nenule. Toate numerele obținute din A, prin permutarea cifrelor sale, se divid prin 7. Să se demonstreze că toate cifrele numărului A sunt egale cu 7.

1982/10.47. La un turneu de șah au participat n fete și $2n$ băieți. Fiecare doi participanți au jucat între ei câte o singură partidă și nici o partidă nu s-a încheiat cu remiză. Să se afle numărul n dacă raportul dintre numărul de victorii obținute de fete și numărul de victorii obținute de băieți este 7:5.

1983/8.48. Sunt date 1983 de greutăți marcate cu masele de 1 g, 2 g, ...,1983 g. Să se formeze din toate aceste greutăți trei grămezi cu mase egale.

1983/9.49. Pe o tablă de șah se află 31 de figuri. Să se demonstreze că pe tablă întotdeauna se va găsi un "unghi" din trei pătrățele libere.

1983/10.50. Fie n ($n > 3$) numere reale distincte aranjate pe cerc. Fiecare număr este egal cu produsul numerelor vecine. Să se afle numărul n.

1983/10.51. Un pătrat $n \times n$ ($n \geq 4$) este împărțit în n^2 pătrățele 1×1 albe sau negre. În fiecare linie și în fiecare coloană există numai un pătrățel negru. Se permite să se schimbe concomitent culoarea tuturor pătrățelelor dintr-o linie sau dintr-o coloană. Să se demonstreze că, aplicând succesiv acest procedeu, nu se pot obține mai puțin de n pătrățele negre.

1984/8.52. Fiecare față a unui cub este împărțită în patru pătrate congruente. Fiecare pătrat obținut este vopsit cu una din trei culori diferite. Să se demonstreze că, dacă oricare două pătrate cu latura comună au culori diferite, atunci se pot găsi opt pătrate de fiecare culoare.

1984/9.53. Laturile și diagonalele unui poligon convex cu n laturi reprezintă coridoarele unui labirint. Să se afle numărul minim de lămpi care trebuie instalate pentru a lumina complet labirintul. (Fiecare lampă luminează complet fiecare coridor pe care se află.)

1984/10.54. Fie numerele naturale nenule a, b, c și d astfel încât $ab = cd$. Să se demonstreze că $a + b + c + d$ este un număr compus.

1984/10.55. O țară cu 51 de orașe are forma unui pătrat cu latura de 1000 km. Se pot uni aceste orașe cu o rețea de drumuri astfel încât lungimea acesteia să nu fie mai mare decât 11000 km ?

1985/8.56. Fie parabolele $y = x^2 + p_i x + q_i$ ($1 \leq i \leq n$), unde numerele p_i sunt distincte. Să se afle numărul maxim de puncte din plan prin care trec cel puțin două dintre aceste parabole.

1985/8.57. Pe o tablă sunt scrise numerele:

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8}$$

În fața fiecăruia dintre aceste numere se pot pune, în mod arbitrar, unul din semnele "+" sau "–". Să se demonstreze că nici una din sumele algebrice obținute nu este egală cu zero. Să se afle numărul minim de numere, care trebuie șterse de pe tablă, pentru ca din cele rămase să se poată forma o sumă algebrică egală cu zero.

1985/9.58. Zidul unei cetăți reprezintă o linie poligonală închisă ce nu se autointersectează. Fiecare două segmente vecine ale acestei linii poligonale formează un unghi drept. Într-o noapte, un parașutist a aterizat lângă zidul cetății. Cum poate afla parașutistul, mergând numai pe lângă zid, dacă a aterizat în interiorul sau în exteriorul cetății?

1985/9.59. Un triunghi echilateral poate fi acoperit cu 5 triunghiuri echilaterale congruente. Să se demonstreze că triunghiul dat poate fi acoperit doar cu patru dintre cele cinci triunghiuri.

1985/10.60. Pe axa numerică sunt colorate punctele $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{N}^*, q \leq 100$). Să se demonstreze că pe segmentul $\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{5}\right]$ există cel puțin patru segmente deschise disjuncte, fiecare de lungime $3 \cdot 10^{-3}$, ce nu conțin nici unul dintre punctele colorate.

A XXX-A OLIMPIADĂ (1986)

Clasa a VIII-a

1986/8.1. Să se demonstreze că, dacă numerele distincte $\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}$ formează o progresie aritmetică, atunci $b = d$.

1986/8.2. Există numere întregi nenule *x, y, z, t* astfel încât $24^x 25^y 27^z 30^t = 1$?

1986/8.3. În cameră se află trei scaune. De fiecare dată putem schimba locurile a două scaune. Să se arate că, după 9 schimbări, scaunele nu se vor afla în poziția inițială.

1986/8.4. Printr-un punct *M* din interiorul patrulaterului *ABCD*, sunt duse patru cercuri distincte congruente, dar de aceeași rază, astfel încât fiecare cerc este tangent la două laturi consecutive ale patrulaterului. Să se demonstreze că punctele *A, B, C* și *D* aparțin unui cerc.

1986/8.5. Printr-un punct *M* situat în interiorul unui cerc sunt duse perechi de coarde perpendiculare. Să se demonstreze că suma pătratelor lungimilor coardelor fiecărei perechi este constantă.

Clasa a IX-a

1986/9.6. Fie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcții de gradul al doilea. Numerele distincte x_1, x_2, x_3 sunt abscisele vârfurilor parabolelor care reprezintă grafic funcțiile $f, f+g, g$. Să se demonstreze că dacă x_1, x_2, x_3 formează o progresie aritmetică, atunci $y = f(x) - g(x)$ este ecuația unei drepte.

1986/9.7. Suma a 1986 de numere întregi distincte este egală cu zero. Să se demonstreze că printre aceste numere există două a căror diferență se divide prin 1986.

1986/9.8. La o masă rotundă, în mod arbitrar, s-au așezat 7 fete și 7 băieți. Care este valoarea maximă posibilă a numărului minim de băieți ce trebuie să schimbe locul cu fetele pentru ca vecinii oricărei fete să fie băieți?

1986/9.9. Fie triunghiul *ABC* și centrul *O* al cercului circumscris acestui triunghi. Cercul ce trece prin punctele *A, C* și *O* este tangent la latura *AB*. Să se demonstreze că triunghiul *ABC* este isoscel.

1986/9.10. Să se demonstreze că prin oricare punct interior al unui pentagon convex se poate duce o dreaptă, care trece printr-un vârf al pentagonului și împarte pentagonul în două poligoane diferite de triunghi.

Clasa a X-a

1986/10.11. Fie numerele reale $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$, unde $a_1 = a_7 = 0$. Să se demonstreze că printre acestea se vor găsi trei numere a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, care satisfac inegalitatea: $a_i + a_{i+2} \le a_{i+1}\sqrt{3}$.

1986/10.12. Să se demonstreze că numărul $\underbrace{111\ldots1}_{1986}\underbrace{222\ldots22}_{1986}$ poate fi scris ca produs de două numere naturale consecutive.

1986/10.13. Se știe că, oricum am împărți 33 de pietre în două grămezi a câte 17 și respectiv 16 pietre, putem lăsa 15 pietre în fiecare grămadă astfel încât ambele grămezi să fie de aceeași greutate. Să se demonstreze că printre aceste 33 de pietre există cel puțin 31 de aceeași greutate.

1986/10.14. Pe fiecare latură a unui pătrat se ia câte un punct. Să se demonstreze că perimetrul patrulaterului cu vârfurile în aceste puncte nu depășește suma lungimilor diagonalelor pătratului.

1986/10.15. Printr-un punct M din interiorul unei sfere sunt duse triplete de coarde perpendiculare. Să se demonstreze că suma pătratelor lungimilor coardelor fiecărui triplet este constantă.

A XXXI-A OLIMPIADĂ (1987)

Clasa a VIII-a

1987/8.1. Să se demonstreze că printre oricare patru numere întregi există două a căror diferență se divide cu 3.

1987/8.2. Să se demonstreze că, dacă $x + y = 2$, atunci $x \cdot y \le 1$. Aflați valoarea de adevăr a afirmației: "dacă $x + y \le 2$, atunci $x \cdot y \le 1$".

1987/8.3. Dintre patru monede de 1, 2, 3 și 5 copeici una este falsă și se deosebește de cele veritabile prin greutate. E posibil ca, având la dispoziție un cântar cu talere, fără greutăți marcate, prin numai două cântăriri să aflăm moneda falsă, dacă monedele veritabile au greutățile de respectiv 1g, 2g, 3g și 5g ?

1987/8.4. Un ciclist și un motociclist pornesc simultan din punctele A și respectiv B unul în întâmpinarea altuia. Ei se întâlnesc în punctul C, își continuă drumul, cu aceeași viteză, ajung în punctele de destinație și se întorc înapoi. Se reîntâlnesc în punctul D. Să se afle distanța dintre A și B, dacă $AC = m$ și $BD = n$.

1987/8.5. În triunghiul ABC punctele A_1, B_1, C_1 aparțin dreptelor BC, AC și respectiv AB. Să se afle raportul ariilor triunghiurilor $A_1B_1C_1$ și ABC, știind că $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$.

Clasa a IX-a

1987/9.6. Se spune că, în trecut, în fiecare familie, celui de-al treilea băiat i se dădea numele Petru, iar celorlalți – Ion. Care erau mai mulți: Ion al lui Petru sau Petru al lui Ion?

1987/9.7. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $x^{x^{1987}} = 1987$.

1987/9.8. Din 1987 de numere distincte s-au format toate diferențele pozitive de două numere posibile și s-au obținut 1986 de rezultate distincte. Să se demonstreze că numerele inițiale, aranjate în ordine crescătoare, formează o progresie aritmetică.

1987/9.9. Să se demonstreze că orice poligon format din 100 pătrățele 1×1 (oricare două pătrățele sau nu au puncte comune sau au o latură comună) poate fi acoperit cu o foaie de hârtie dreptunghiulară de dimensiuni 50×100.

1987/9.10. Printr-un punct de intersecție a două cercuri, sub același unghi față de coarda comună, sunt duse două drepte distincte. Una dintre acestea intersectează cercurile în punctele A și B, iar cealaltă, în punctele C și D. Să se demonstreze că $AB = CD$.

Clasa a X-a

1987/10.11. Să se demonstreze că orice soluție a sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2+x-y=0 \\ x^2-2xy+y^2-5x+7y=0 \end{cases}$$

verifică ecuația $xy-12x+15y=0$.

1987/10.12. Printre 1987 de monede, ce nu se deosebesc exterior și a căror greutate totală este egală cu greutatea a 1987 de monede veritabile, sunt și câteva false. Greutatea fiecărei monede false diferă de cea a monedei veritabile printr-un număr impar de grame. Să se demonstreze că, având la dispoziție un cântar cu talere și diviziuni în grame, printr-o singură cântărire se poate spune dacă o monedă arbitrară este falsă sau veritabilă.

1987/10.13. În cubulețul unitar central al unui cub de dimensiuni 3×3×3 se află un cărăbuș, care poate trece dintr-un cubuleț în unul altul învecinat prin fața lor comună. Poate cărăbușul să treacă prin toate cubulețele câte o singură dată?

1987/10.14. Pe un suport se montează patru ceasuri a căror cadrane sunt orientate astfel încât extremitățile minutarelor să coincidă în orice moment cu vârfurile unui pătrat. Să se demonstreze că centrele cercurilor descrise de aceste minutare determină și ele un pătrat.

1987/10.15. Să se afle aria poligonului cu $2n$ laturi $A_1B_1A_2B_2A_3B_3 \dots A_nB_n$, știind că $A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3+\dots+A_nB_n=a$ și că toate laturile sau prelungirile lor în interiorul poligonului sunt tangente unui cerc de rază r.

A XXXII-A OLIMPIADĂ (1988)

Clasa a VIII-a

1988/8.1. Un oraș cu perimetrul de 30 km este împărțit de străzile sale interne în 80 de cartiere. Perimetrul fiecărui cartier este de 1200 m. Să se afle lungimea totală a străzilor din interiorul acestui oraș (lățimea străzilor se neglijează).

1988/8.2. Într-o lună, Petrică și Ionel au luat 20 de note fiecare și au avut aceeași medie. Numărul de note de cinci, de patru, de trei și de doi, luate de Petrică, este egal respectiv cu numărul de note de patru, de trei, de doi și de cinci, luate de Ionel. Câte note de cinci a luat Ionel?

1988/8.3. Cum putem măsura 1,5 kg de zahăr, având la dispoziție un cântar cu talere și o singură greutate marcată de 3 g, dacă zahărul deja cântărit se păstrează doar pe talere.

1988/8.4. Un patrulater este înscris într-un cerc de rază R. Segmentul ce unește mijloacele ale două laturi alăturate ale patrulaterului formează cu acestea un triunghi. Să se demonstreze că raza cercului circumscris acestui triunghi este egală cu $\frac{R}{2}$.

1988/8.5. Să se demonstreze că dacă $x^5-x^3+x=2$, atunci $x^6>3$.

Clasa a IX-a

1988/9.6. Un elev înmulțește un număr de două cifre cu suma cifrelor sale, iar un altul calculează suma cuburilor cifrelor aceluiași număr. Ambii obțin rezultate egale. Efectuând aceleași operații cu un alt număr de două cifre, elevii obțin iarăși rezultate egale. Să se afle aceste numere, dacă diferența lor este egală cu 11.

1988/9.7. Triunghiurile Δ_1 și Δ_2 se numesc "de același gen" (notăm $\Delta_1 \leftrightarrow \Delta_2$), dacă două laturi ale triunghiului Δ_1 și unghiul opus primei dintre ele sunt congruente cu două laturi ale triunghiului Δ_2 și respectiv cu unghiul opus primei dintre ele.

Se știe că: $\Delta_1 \leftrightarrow \Delta_2 \leftrightarrow \Delta_3 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow \Delta_n$ și triunghiurile Δ_1 și Δ_n sunt asemenea. Să se determine dacă triunghiurile Δ_1 și Δ_n sunt congruente.

1988/9.8. Pentru un număr natural nenul n prima cifră a numerelor 2^n și 5^n este aceeași. Să se afle această cifră.

1988/9.9. Într-un cerc sunt înscrise două trapeze astfel încât fiecare latură a unui trapez este paralelă cu o latură a celuilalt trapez. Să se demonstreze că toate diagonalele acestor trapeze sunt congruente.

1988/9.10. Se știe că ecuațiile $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ și $a_2x^2+b_2x+c_2=0$, cu coeficienți întregi nenuli, au o rădăcină comună irațională. Să se demonstreze că:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

Clasa a X-a

1988/10.11. Fie polinomul $F(X,Y)=X^2+2AXY+Y^2$, $A\in\mathbb{Z}$.

Să se demonstreze că, dacă numerele întregi a, b, c și d verifică egalitatea $F(a,b)=F(c,d)$, atunci numărul $a+b+c+d$ este par.

1988/10.12. În spațiu sunt date n ($n\geq 4$) puncte astfel încât oricare patru dintre ele nu sunt coplanare. Se știe că dacă o sferă trece prin oricare patru puncte, atunci toate celelalte puncte aparțin acestei sfere sau sunt situate în interiorul ei. Să se demonstreze că toate aceste puncte sunt situate pe o sferă.

1988/10.13. Să se demonstreze că pentru orice numere reale x și y are loc inegalitatea:

$$\cos(x+y)+2\cos x+2\cos y+3\geq 0.$$

1988/10.14. Vârfurile A și B ale triunghiului ABC aparțin unui cerc, care intersectează laturile AC și CB în punctele P și respectiv D. Pe latura AB se iau punctele K și E astfel încât $DK \parallel CA$ și $PE \parallel CB$. Să se demonstreze că punctele P, D, K, E sunt conciclice.

1988/10.15. Șirul finit de numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se înlocuiește cu șirul $|a_1-b|$, $|a_2-b|$, ..., $|a_n-b|$, unde b este ales arbitrar. Să se demonstreze că, efectuând câteva transformări de acest fel, putem obține un șir, în care toți termenii sunt egali cu zero.

A XXXIII-A OLIMPIADĂ (1989)

Clasa a VIII-a

1989/8.1. Se știe că prețul unui diamant este direct proporțional cu pătratul masei lui. Întâmplător, diamantul s-a despicat în două bucăți și prețul lui total s-a micșorat cu 18%. Care este raportul greutăților obținute?

1989/8.2. În centrul fiecărui pătrățel al unei table de dimensiuni 1989×1989 se află câte un cărăbuș. Simultan, fiecare cărăbuș trece într-un pătrățel vecin, care are doar un vârf comun cu pătrățelul precedent. Câteva pătrățele vor rămâne libere. Să se afle cel mai mic număr posibil de pătrățele libere.

1989/8.3. Din șirul numerelor naturale impare s-au exclus numărul 1 și numerele divizibile cu 3. Numerele rămase formează un șir crescător (a_n), $n \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că $a_n > 3n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

1989/8.4. Să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor opuse ale unui patrulater sunt paralele, dacă și numai dacă celelalte două unghiuri sunt congruente.

1989/8.5. Diagonalele patrulaterului *ABCD* sunt perpendiculare. Prin mijloacele laturilor *AB* și *AD* sunt duse drepte perpendiculare pe laturile opuse. Să se demonstreze că aceste drepte se intersectează pe dreapta *AC*.

Clasa a IX-a

1989/9.6. Să se afle cel mai mic număr natural divizibil cu 7, care la împărțirea cu oricare dintre numerele 2, 3, 4, 5, și 6 dă restul 1.

1989/9.7. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots+\sqrt{20}}}+\sqrt{30+\sqrt{30+\ldots+\sqrt{30}}}+\sqrt{42+\sqrt{42+\ldots+\sqrt{42}}}<18.$$

1989/9.8. În toate pătrățelele 1×1 ale unei table de dimensiuni $m \times n$ sunt scrise numere astfel încât numerele din fiecare linie și din fiecare coloană formează progresii aritmetice. Suma celor patru numere scrise în colțurile tablei este egală cu *S*. Să se afle suma tuturor numerelor de pe tablă.

1989/9.9. În interiorul unui cerc este inclus pentagonul *ABCDE* cu laturile congruente. Fiecare latură a pentagonului se prelungește până la intersecția ei cu cercul. Prelungirile de pe semidreptele (*AB*, (*BC*, (*CD*, (*DE*, (*EA* sunt vopsite în albastru, iar celelalte prelungiri în roșu. Să se demonstreze că suma lungimilor tuturor segmentelor vopsite în roșu este egală cu suma lungimilor tuturor segmentelor vopsite în albastru.

1989/9.10. Fie un cerc și coarda *MC*. Un alt cerc, cu centrul în punctul *M*, intersectează primul cerc și coarda *MC* în punctele *A*, *B* și respectiv *D*. Să se demonstreze că bisectoarele triunghiului *ABC* se intersectează în punctul *D*.